

Einfluss von parasitären Effekten und Fertigungsabweichungen auf die Kräfte in elektrischen Maschinen

M. Schröder, A. Ruf, D. Franck, K. Hameyer

Im Fertigungsprozess von elektrischen Maschinen treten unweigerlich Abweichungen auf. Wie bei allen Fertigungsprozessen ist nur eine endliche Fertigungsgenauigkeit erreichbar, so dass jedes gefertigte Bauteil eine Abweichung von seinen idealen Eigenschaften aufweist. In mehrstufigen Fertigungsverfahren akkumulieren sich diese Abweichungen der einzelnen Bauteile. Für die Konstruktion und Fertigung einer elektrischen Maschine werden die Bauteile zwar entsprechend toleriert, während der elektromagnetischen Auslegung hingegen wird weitestgehend von idealen Abmessungen und geometrischen Symmetrien ausgegangen. Eine übliche Asymmetrie beispielsweise ist die Exzentrizität, eine nicht konzentrische Ausrichtung zwischen Rotor und Stator.

Bei der Auslegung und der Berechnung der elektrischen Maschine werden in der Regel auch isotrope und homogene Materialeigenschaften angenommen. In permanentmagneterregten elektrischen Maschinen unterliegen die Permanentmagnete beispielsweise je nach Güte einer deutlichen lokalen Abweichung in ihrer Magnetisierungsamplitude und -richtung.

All diese Abweichungen haben Einfluss auf die magnetische Flussdichteverteilung in der Maschine und somit auch auf die auftretenden lokalen Kräfte. Summenkräfte, Drehmoment, Verluste, akustisches Verhalten oder Lebensdauer nicht idealer elektrischer Maschinen können somit deutlich von denen in idealen Maschinen abweichen. Wird die Maschine in einem geregelten Antriebsstrang betrieben, sind auch parasitäre Einflüsse durch Antriebsstrangkomponenten wie Leistungselektronik und Regelung von Bedeutung.

In diesem Beitrag wird der Einfluss von parasitären Effekten und Fertigungsabweichungen auf die Kräfte in elektrischen Maschinen untersucht. Durch statistische Toleranzrechnung werden die Wahrscheinlichkeiten für ausgewählte Abweichungen bestimmt. Mittels eines zeiteffizienten analytischen Rechenverfahrens werden die durch die Abweichungen zusätzlich entstehenden Kräfte über den gesamten Betriebsbereich der elektrischen Maschine bestimmt und charakterisiert.

Schlüsselwörter: elektrische Maschine; Antriebsstrang; Fertigungsabweichung; Kraftanregung; statistische Toleranzrechnung

Influence of parasitic effects and manufacturing deviations on forces in electrical machines.

In the production process of electrical machines, various stochastic manufacturing deviations occur. Like all production processes, just a limited accuracy is achievable. Every manufactured component deviates from its ideal properties. During the manufacturing steps, deviations of the individual parts are accumulated. The components of electrical machines are designed and produced within a tolerance range. During the electromagnetic design, ideal dimensions and geometric symmetries are usually assumed. This does not reflect the reality. An example of a typical asymmetric problem is eccentricity, a non-concentric orientation between the rotor and the stator.

Furthermore, in the design and simulation of electrical machines, the material properties are normally assumed to be isotropic and homogeneous. Due to the manufacturing process, the material properties can deviate from their ideal characteristics. In electrical machines with permanent magnets, e.g. the magnets have considerably local deviations in magnitude and direction of the magnetization.

All deviations influence the flux density distribution in an electrical machine. This leads to the deviation of the calculated local forces. Therefore, the behavior of a real electrical machine, i.e. sum forces, torque, losses, acoustic behavior or operating lifetime, can differ significantly from an ideal machine. For machines operating in controlled drive trains, parasitic effects from the drive train components, such as power electronics and control, have significant roles.

In this article, the influences of manufacturing deviations and parasitic effects on forces in electrical machines are presented. With statistic tolerance calculation, the probabilities for relevant manufacturing deviations are determined. With a time efficient analytical analysis tool, the forces originated by manufacturing deviations are calculated. The forces are determined and distinguished for the whole operating area of the machine.

Keywords: electrical machine; drive train; manufacturing deviations; force excitation; statistic tolerance calculation

Eingegangen am 18. November 2016, angenommen am 28. Jänner 2017, online publiziert am 15. März 2017
© Springer Verlag Wien 2017



1. Einleitung und Problemstellung

Seit Anfang des 20. Jahrhunderts ist bekannt, dass Abweichungen und zugelassene Toleranzen im Fertigungsprozess, das Verhalten elektrischer Maschinen beeinflussen. Beispielsweise hat Hildebrand 1930 in einer Veröffentlichung konstatiert, dass die Unwucht im Rotor einer Asynchronmaschine oder die statische Exzentrizität des Ro-

Schröder, Michael, Institut für Elektrische Maschinen (IEM), RWTH Aachen University, Schinkelstraße 4, 52062, Aachen, Deutschland (E-Mail: michael.schroeder@iem.rwth-aachen.de); **Ruf, Andreas**, Institut für Elektrische Maschinen (IEM), RWTH Aachen University, Schinkelstraße 4, 52062, Aachen, Deutschland; **Franck, David**, Institut für Elektrische Maschinen (IEM), RWTH Aachen University, Schinkelstraße 4, 52062, Aachen, Deutschland; **Hameyer, Kay**, Institut für Elektrische Maschinen (IEM), RWTH Aachen University, Schinkelstraße 4, 52062, Aachen, Deutschland

tors zu unsymmetrischen, einseitigen magnetischen Zugkraftwellen führt [1]. Jordan hat diese Effekte 1950 analysiert und mit relativ einfachen analytischen Modellen in der Oberwellentheorie modelliert [2]. Die Anregungsmechanismen der Zugkraftwellen, die auch Magnetgeräusche zur Folge haben können, lassen sich hiermit gut abbilden, jedoch ist eine durchgängige Behandlung des Geräuschproblems von der Ursache bis hin zur Schalleistung nur unzureichend möglich, da Amplituden nur ungenau modelliert sind.

Statistisch auftretende Abweichungen und auch Fertigungsfehler können Ursache derartiger unerwünschter Anregung sein. Die Fortschritte in Hardware- und Softwareentwicklung im Bereich der Signalverarbeitung und numerischer Simulation haben dazu beigetragen die Entwicklung von Antriebssystemen unter diesem Gesichtspunkt zu verbessern. Bedingt durch den Wunsch, robuste und zuverlässige Systeme aufbauen zu wollen, hat seit Anfang der 90er Jahre die Forschung im Bereich der Fehlerdiagnose von elektrischen Maschinen zugenommen. Durch unterschiedliche Methoden, zum Beispiel die Zerlegung der harmonischen Anteile des Statorstroms, die Messung des axialen magnetischen Flusses und die Schwingungsanalyse, können die Fehler in einer Maschine untersucht werden, wie Nandi und Toliyat 1999 übersichtlich darstellen [3]. Eine der Ursachen von solchen in der Maschine auftretenden Fehlern sind fertigungsbedingte Abweichungen, welche die Eigenschaften elektrischer Maschinen beeinflussen.

Seit mehreren Jahren werden Verfahren entwickelt, die für eine Erkennung von Fertigungsabweichungen in elektrischen Maschinen verwendet werden können. Grundlegende Arbeiten finden sich im Themengebiet der Akustik [4]. Bei anderen Arbeiten wird der Einfluss der Be- und Verarbeitung der im Elektromaschinenbau verwendeten Materialien untersucht, zum Beispiel der Einfluss der Blechverarbeitung auf die magnetischen Eigenschaften des Eisenkreises in Asynchronmaschinen oder der Einfluss von Aufmagnetisierungsfehlern von Permanentmagneten auf das Rastmoment von permanentmagneterregten Maschinen [5]. Aktuelle Arbeiten konzentrieren sich auf die Fehlerdiagnose und auf isolierte Fertigungseinflüsse bezüglich des Maschinenverhaltens. Das Verhalten der Maschinenelemente steht in Wechselwirkung zu den anderen Komponenten des Antriebssystems. Beispielsweise kann eine mögliche magnetische Anisotropie des Rotor- oder des Statorblechpakets einen Einfluss auf die Maschinenregelung haben [6].

Fertigungseinflüsse auf das Rastmoment von permanentmagneterregten Synchronmaschinen werden zum Beispiel in [7] untersucht. Magnetisierungsfehler, insbesondere Abweichungen der Amplitude der Remanenzflussdichte, verursachen zusätzliche Rastmomente. Ist der Magnetisierungsfehler bekannt, kann eine Rastmomentänderung abgeschätzt werden. Die Modelle nutzen Finite-Elemente-Analysen, sind daher rechenintensiv und aufwendig bei der Modellierung von Geometrieänderungen. Über analytische Berechnungen können nur die zu erwartenden Kraftordnungen abgeschätzt werden.

Montagefehler beim Aufbringen von Permanentmagneten können zu Polunsymmetrien führen, die sich sowohl auf Verluste als auch auf Rastmomente in permanentmagneterregten Synchronmotoren nachteilig auswirken, wie am Beispiel von Lüftermotoren kleinerer Leistung in [8] untersucht wird.

Eine Erweiterung zur Modellbildung der Magnetisierungsfehler in einem Permanentmagneten erfolgt beispielsweise in [9]. Es werden zwei Methoden zur Modellierung dieser Störung in einem Magnet vorgestellt, ein physikalisches und ein nicht-physikalisches Modell. Das physikalische Modell basiert auf dem Aufmagnetisierungsverfahren im Fertigungsprozess. Beim nicht-physikalischen Modell wird der Permanentmagnet in kleine Magnetsegmente mit unterschiedlichen Magnetisierungsrichtungen unterteilt. Mit der Anwendung

des ersten Modells kann der Aufmagnetisierungsfehler aufgrund der Fertigungsabweichung modelliert werden. Durch das zweite Modell ist die Modellierung lokaler Abweichungen möglich. Weitere Fertigungseinflüsse werden in diesem Zusammenhang nicht betrachtet und auch nicht der Gesamtantriebsstrang.

Verschiedene Fertigungseinflüsse werden von Steinbrink in [10] untersucht. Analytische Rechenverfahren erlauben die Berechnung von Kraftwirkungen in permanentmagneterregten Maschinen und die quantitative Vorausbestimmung von Rastmoment und Rüttelkraft für stationäre Betriebspunkte. Die geregelte Maschine im Antriebsstrang wird dabei nicht betrachtet.

Gesamtantriebsstrangmodelle wie sie in [11] und [12] vorgestellt werden, erlauben die zeittransiente Simulation des gesamten Antriebsstrangs. Einflüsse der Leistungselektronik, nichtidealer Regler und Fertigungsabweichungen können gut abgebildet und bewertet werden, erfordern aber einen verhältnismäßig hohen Rechenaufwand.

In diesem Beitrag wird daher eine Möglichkeit vorgestellt, den Einfluss von parasitären Effekten und Fertigungsabweichungen auf die Kräfte in elektrischen Maschinen so zu modellieren, dass Berechnungen zeiteffizient möglich sind – bei ausreichender Genauigkeit. Zunächst werden durch statistische Toleranzrechnung die Wahrscheinlichkeiten für Exzentrizitäten bestimmt. Zur Feldberechnung wird anschließend die Methode der konformen Abbildungen, welche eine analytische Berechnung der Felder ermöglicht, verwendet und um die Modellierung von Fertigungsabweichungen erweitert. Um die Betriebscharakteristik der Maschine zu berücksichtigen, wird die Maschine in einem dq-Koordinatensystem modelliert, so dass die Kräfte mittels eines Antriebssimulationsmodells über den gesamten Betriebsbereich der elektrischen Maschine bestimmt und charakterisiert werden können.

2. Bestimmung von Fertigungsabweichungen

Die Bewertung der vorgestellten Methodik wird in diesem Beitrag an einer permanentmagneterregten Synchronmaschine durchgeführt. Die elektrische Maschine besitzt 48 Zähne/Nuten und acht Pole. Der Bohrungsdurchmesser beträgt 161,4 mm und die Maschinenlänge 90 mm. Generell ist die vorgestellte Methode geometrieunabhängig. Es wird die Annahme getroffen, dass sämtliche in der Maschine verbauten mechanischen Komponenten zu einer statischen oder dynamischen Exzentrizität des Rotors führen können. Die resultierenden Exzentrizitäten, die sich durch eine Überlagerung der Toleranzen ergeben, werden mit Hilfe der Monte-Carlo-Methode und den Fertigungszeichnungen der Maschine bestimmt.

In Abb. 1(a) ist exemplarisch ein axialer Schnitt durch eine elektrische Maschine und in Abb. 1(b) die dazugehörige Maßkette dargestellt, die dazu verwendet wird um die statistischen Verteilungen der Exzentrizitäten zu berechnen.

Zur Modellierung jeder geometrischen Fertigungsabweichung innerhalb der Toleranzfelder M_i , wird eine abgeschnittene Normalverteilung mit 10^6 Elementen angenommen:

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{\exp\left(\frac{(x-\mu)^2}{-2\sigma^2}\right)}{\int_0^\infty \exp\left(\frac{(x-\mu)^2}{-2\sigma^2}\right)} \cdot I_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{\exp\left(\frac{(x-\mu)^2}{-2\sigma^2}\right)}{\int_0^\infty \exp\left(\frac{(x-\mu)^2}{-2\sigma^2}\right)}, & x > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Im industriellen Bereich werden Fertigungsprozesse durch Prozesskontrollgrenzen kontrolliert. Heutzutage entspricht die Standardintervallbreite zwischen den Prozesskontrollgrenzen der achtfachen

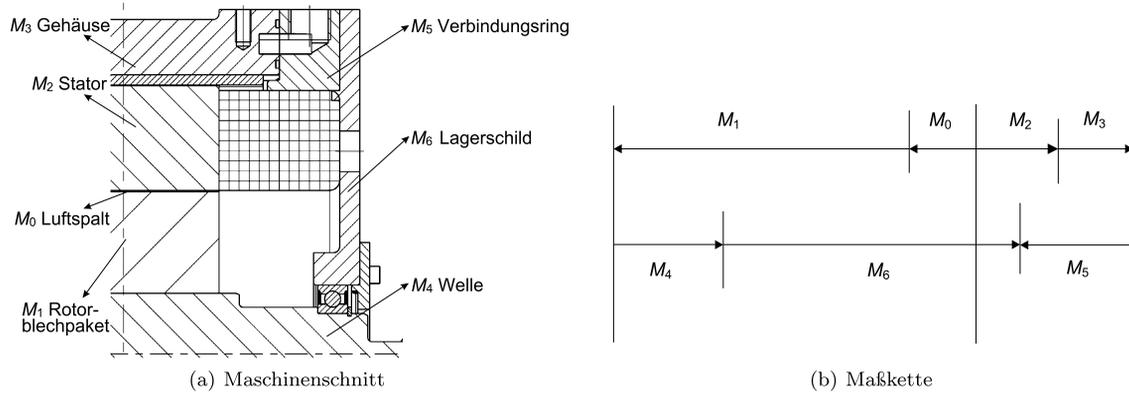


Abb. 1. Maschinenschnitt und Maßkette zur Bestimmung der Exzentrizitäten

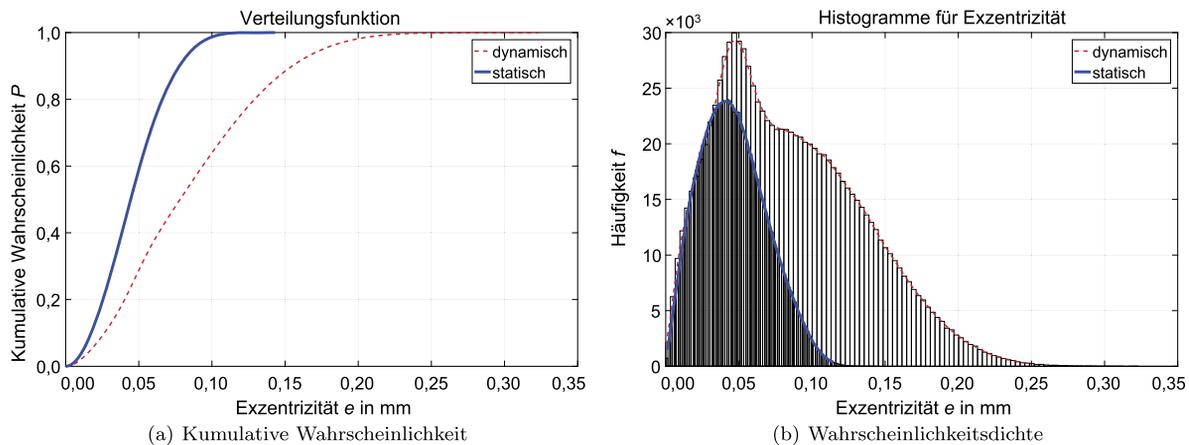


Abb. 2. Kumulative Wahrscheinlichkeit und Wahrscheinlichkeitsdichte für statische und dynamische Exzentrizitäten

Standardabweichung 8σ . Aus diesem Grund werden die Toleranzlimitierungen entsprechend dem Wert 8σ festgelegt und der Erwartungswert μ innerhalb dieser Limitierungen zentriert.

Für die hier untersuchte Maschine ergeben sich damit die stochastischen Parameter zu $\mu = 25 \mu\text{m}$ und $\sigma = 6,25 \mu\text{m}$. Durch eine Überlagerung aller Abweichungen in der Maßkette kann die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Exzentrizitäten bestimmt werden. In den Abb. 2(a) und 2(b) sind die geglätteten Verteilungen dargestellt, die 10^6 Fälle von Exzentrizität abbilden. Aus Abb. 2(b) ist ersichtlich, dass eine statische oder dynamische Exzentrizität in der Größenordnung von $e = 50 \mu\text{m}$ am wahrscheinlichsten auftritt.

Um den Einfluss solcher Fertigungsabweichungen auf die Kräfte in der elektrischen Maschinen zu bestimmen, muss der gesamte Betriebsbereich der Maschine betrachtet werden, da sich die Kräfte abhängig von Rotorposition und Bestromungszustand ändern. In [13] wird diese Betrachtung mittels Finiter-Elemente-Analysen durchgeführt. Dazu werden für verschiedene Rotorpositionen, Stromkombinationen und Exzentrizitäten, eine Vielzahl an rechenintensiven numerischen Simulationen durchgeführt. Daher wird hier eine Möglichkeit vorgestellt, den Einfluss von Fertigungsabweichungen so zu modellieren, dass Berechnungen zeiteffizient möglich sind. Zur Feldberechnung wird die Methode der konformen Abbildungen, welche eine analytische Berechnung der Felder ermöglicht, verwendet.

3. Methodik

Die Methode der konformen Abbildungen wird seit Beginn des 20. Jahrhunderts zur Lösung von Problemstellungen bei elektrischen Maschinen verwendet, nachdem Carter damit die analytische Berechnung des magnetischen Feldes im Luftspalt elektrischer Maschinen vorstellt [14]. Žarko präsentiert zur Beschreibung des Nutzungseinflusses eine komplexwertige örtlich variierende Permeanzfunktion in radialer und tangentialer Richtung [15]. Dabei werden ideale ferromagnetische Materialeigenschaften für Stator und Rotor (relative magnetische Permeabilität $\mu_r \rightarrow \infty$) und lineare Materialeigenschaften in der Luft und in den Permanentmagneten ($\mu_r = \text{const.}$) angenommen. Hafner beschreibt in [16], dass das magnetische Luftspaltfeld $\underline{B}_{\text{Luftspalt}}(\alpha, t)$ in einer permanentmagneterregten elektrischen Maschine aus drei Hauptkomponenten berechnet werden kann:

$$\underline{B}_{\text{Luftspalt}}(\alpha, t) = \underline{B}_{\text{PM}}(\alpha, t) \cdot \underline{\lambda}^*(\alpha) + \underline{B}_{\text{Stator}}(\alpha, t) \quad (2)$$

Dabei ist $\underline{B}_{\text{PM}}(\alpha, t)$ das von den Rotormagneten im Luftspalt hervorgerufene Feld, in Abhängigkeit des Umfangwinkels $\alpha \in [0, 2\pi)$ und der Zeit t , unter der Annahme eines ungenutzten, unendlich permeablen Stators (Neumann Randbedingung). Das von den stromführenden Spulen in den Statornuten hervorgerufene Magnetfeld im Luftspalt wird durch die Komponente $\underline{B}_{\text{Stator}}(\alpha, t)$ berücksichtigt und der Einfluss der Statornutzung auf das ungenutzte Rotorfeld wird durch die relative Permeanzfunktion $\underline{\lambda}(\alpha)$ beschrieben. $\underline{\lambda}^*(\alpha)$ ist der konjugiert-komplexe Wert der relativen Permeanzfunktion.

Die drei Hauptkomponenten sind alle komplexwertige Größen, wobei der Realteil jeweils die radiale Komponente und der Imaginärteil jeweils die tangentielle Komponente repräsentieren. Für das magnetische Rotorfeld gilt daher beispielsweise:

$$\underline{B}_{PM}(\alpha, t) = B_{PM,rad}(\alpha, t) + j \cdot B_{PM,tan}(\alpha, t) \quad (3)$$

Ein vergleichbarer Ansatz wie der der konformen Abbildung, wird von Zhu in [17] beschrieben, in Form der so genannten Feldrekonstruktionsmethode. Damit können radiale und tangentielle Kraftkomponenten für verschiedene Statorströme mit geringem Rechenaufwand bestimmt werden. Dazu werden das magnetische Feld der Permanentmagnete und das Feld eines Leiters in einer Nut einmalig separat mittels Finiter-Elemente-Analyse (FEA) bestimmt. Die so berechneten Einzelfelder werden dann in Abhängigkeit von Rotordrehwinkel, Wickelschema und Bestromung zum gesamten magnetischen Luftspaltfeld rekonstruiert. Dieses Verfahren benötigt weniger Rechenzeit als eine vollständige FEA für jeden Zeitschritt.

Ein ähnliches Verfahren wird von Hafner in [18] gezeigt, wo eine Erweiterung des Ansatzes der konformen Abbildungen vorgestellt wird. Dort werden analytische Rechnungen durch einzelne numerische Simulationen ergänzt, so dass Effekte wie Nutstreuung oder Sättigung im Modell über einen breiten Betriebsbereich der elektrischen Maschine berücksichtigt werden können.

Beide Ansätze liefern in ihrem Gültigkeitsbereich eine Genauigkeit vergleichbar zu einer FEA, bei einem geringeren Rechenaufwand. Der Modellierungsaufwand zur Erstellung der FE-Netze bleibt jedoch vorhanden. Fertigungseinflüsse werden dabei nicht berücksichtigt. In dieser Arbeit wird daher ein Modell vorgestellt, welches den analytischen Ansatz der konformen Abbildungen nutzt und Fertigungseinflüsse abbilden kann. Im Folgenden werden die Berechnung der drei Feldkomponenten aus (2) beschrieben und die Abbildung von Fertigungseinflüssen.

3.1 Relative Statorpermeanzfunktion

Die relative Statorpermeanzfunktion $\underline{\lambda}(\alpha)$ ist eine einheitenlose Größe und beschreibt das Verhältnis der magnetischen Flussdichte im genuteten Luftspalt zur Flussdichte im glatten Luftspalt [15]. Die Permeanzfunktion $\underline{\lambda}_{Nut}(\alpha)$ für eine Nutteilung wird mittels der Methode der konformen Abbildungen bestimmt. Die Parameter, die zur Berechnung benötigt werden, sind im einfachsten Fall der äußere Rotorradius, der innere Statorradius, die Länge der Nutteilung und Beginn und Ende der Nutöffnung (vgl. Abb. 3). Ziel ist die Überführung dieser Nutgeometrie in eine einfache Geometrie, in der die Feldlösung bekannt ist oder sich analytisch bestimmen lässt. Genutzt wird hierfür die modifizierte Schwarz-Christoffel-Transformation (SCT) [19].

Da bei der modifizierten SCT die Anzahl der Polygonpunkte der Ausgangsgeometrie nahezu beliebig sind, lassen sich gängige Zahnkopfgeometrien modellieren. In der Praxis zeigt sich jedoch, dass es ausreichend ist, wenn nur die Nutöffnung am Luftspalt berücksichtigt wird. Die komplexe Permeanz kann für beliebige radiale Positionen im Luftspalt zwischen äußerem Rotorradius und innerem Statorradius und für beliebige tangentielle Positionen innerhalb der Nutteilung bestimmt werden.

Zunächst wird die einfache Nutgeometrie aus Abb. 3 betrachtet. Die Definition erfolgt in der sogenannten S-Ebene über den Vektor

$$\mathbf{v}_{Geo,S} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \cdot e^{j0} \\ R_2 \cdot e^{j0} \\ R_2 \cdot e^{j\theta_1} \\ \vdots \\ R_1 \cdot e^{j\theta_N} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

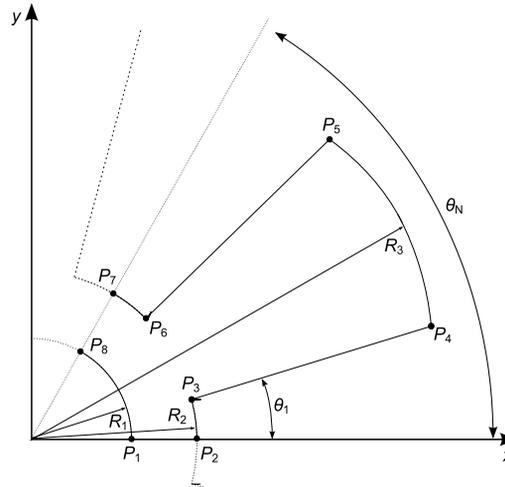


Abb. 3. Einfache Nutgeometrie in einem kartesischen Koordinatensystem, bestehend aus einem Polygon mit den acht Punkten P_1 bis P_8 , drei Radien R_1 bis R_3 und den beiden Winkeln θ_1 und θ_N

der die Koordinaten der Polygonpunkte als komplexe Zahlen enthält. Abbildung 4(a) zeigt diese Eckpunkte, sowie Punkte welche in der Fläche des Magneten liegen und Punkte in der Nutfläche. Außerdem Punkte im Luftspalt, an denen die Feldlösung ausgewertet wird. Mit

$$z = \log(s) \quad (5)$$

ergibt sich der Vektor $\mathbf{v}_{Geo,Z}$ der transformierten Eckpunkte in der Z-Ebene (vergleiche Abb. 4(b)):

$$\mathbf{v}_{Geo,Z} = \begin{bmatrix} \log(R_1) + j0 \\ \log(R_2) + j0 \\ \log(R_2) + j\theta_1 \\ \vdots \\ \log(R_1) + j\theta_N \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Zur Ausführung der SCT wird nun ein weiterer Vektor definiert, welcher die Winkel zu den Punkten aus $\mathbf{v}_{Geo,Z}$ für die Transformation in die Rechteckebene W enthält. Somit wird definiert, welche Punkte in der Berandung in der W -Ebene auf einer Ecke beziehungsweise auf einer Kante liegen. Im Fall der einfachen Nutgeometrie ist

$$\alpha_W = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi, \pi, \pi, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]^T. \quad (7)$$

Dann erfolgt die Berechnung der eigentlichen SCT über $\frac{\partial w}{\partial z}$, die das durch $\mathbf{v}_{Geo,Z}$ in der Z-Ebene definierte Polygon auf ein Rechteck in der W -Ebene, definiert durch $\mathbf{v}_{Geo,W}$ und dargestellt in Abb. 5(a), abbildet. Das Rechteck in der W -Ebene ist somit das Nutpolygon im ungenuteten Fall. Durch die Transformation von der Z- in die W -Ebene, wird für ein geradliniges Koordinatensystem ein glatter Luftspalt geschaffen, dessen Feld äquivalent zu dem Feld des genuteten Luftspalts ist. Für die spätere Berechnung der Ansatzfunktionen ist es erforderlich, dass die Luftspaltmitte des finalen krummlinigen Koordinatensystems bei 1 liegt. Zunächst werden daher mit

$$\Delta U = \max(\text{Re}\{\mathbf{v}_{Geo,W}\}) - \min(\text{Re}\{\mathbf{v}_{Geo,W}\}) \quad (8)$$

und

$$\Delta V = \max(\text{Im}\{\mathbf{v}_{Geo,W}\}) - \min(\text{Im}\{\mathbf{v}_{Geo,W}\}) \quad (9)$$

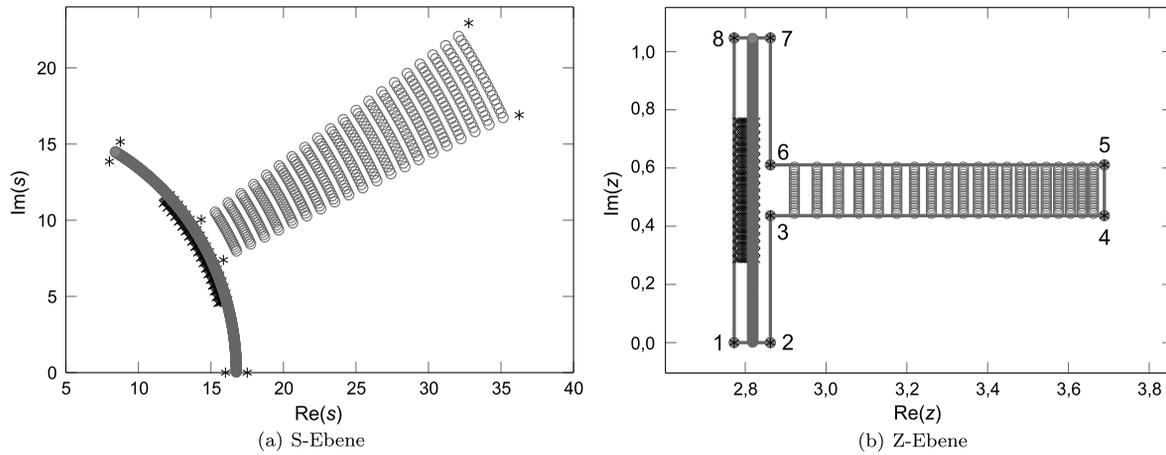


Abb. 4. Polygonpunkte der Nutgeometrie, der Magnetfläche, der Nutfläche und dem Luftspalt in der S-Ebene und in der transformierten Z-Ebene

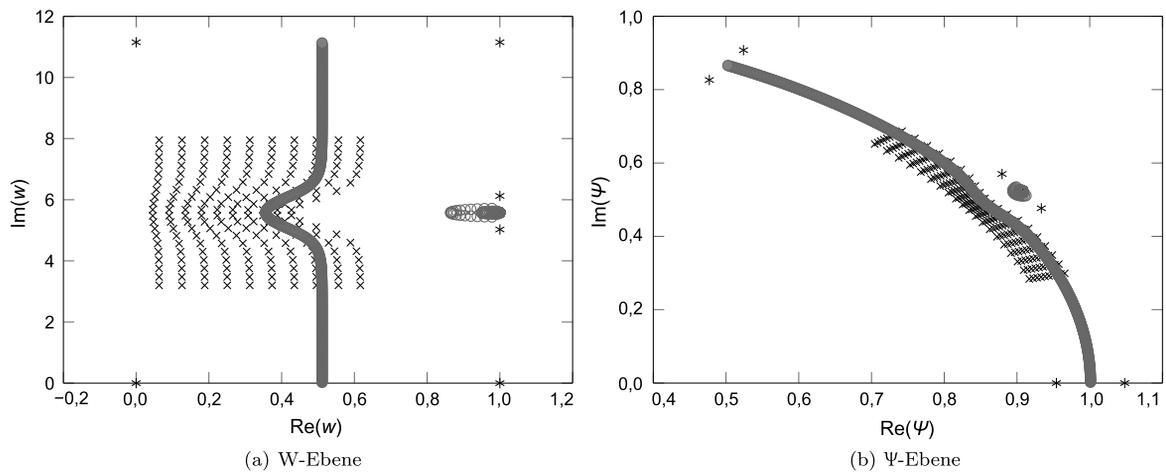


Abb. 5. Polygonpunkte der Nutgeometrie, der Magnetfläche, der Nutfläche und dem Luftspalt in der Rechteckebene W und der Ψ -Ebene

die Dimensionen des Rechtecks in der W -Ebene berechnet. Schließlich erfolgt mit

$$\psi(w) = e^{\frac{qN}{2V} \cdot (w + \frac{\Delta U}{2})} \quad (10)$$

die Transformation von der W - in die Ψ -Ebene – gezeigt in Abb. 5(b).

Da die durchgeführten Transformationen konform sind, gilt für den Gradienten der Felder, hier der Feldstärke H , in der S - und der Ψ -Ebene

$$H_S = H_\Psi \left(\frac{\partial \Psi}{\partial s} \right)^* = H_\Psi \left(\frac{\partial \Psi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \right)^* \quad (11)$$

Da der Gradient $\frac{\partial \Psi}{\partial s}$ genau das Verhältnis zwischen ungenutztem Luftspalt in der Ψ -Ebene und dem genutzten Luftspalt in der S -Ebene beschreibt, ergibt sich aus (11) die Permeanzfunktion einer Nutteilung zu

$$\lambda_{\text{Nut}}(\alpha) = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \right) \quad (12)$$

Rotornuten können über das gleiche beschriebene Verfahren modelliert werden und in einer Rotorpermeanzfunktion abgebildet werden.

Für symmetrische Maschinen ist es ausreichend diese Permeanzfunktion für eine Nutteilung zu bestimmen und dann entsprechend

der Anzahl der Nuten zu replizieren. Weichen die Nutgeometrien der einzelnen Nuten aufgrund von zum Beispiel Fertigungsabweichungen voneinander ab, so müssen die Permeanzfunktionen für jede abweichende Nut separat bestimmt werden. Im Falle einer statischen Rotorextrizität wird der Permeanzfunktion eine Sinusfunktion überlagert [20]. Mittels der konformen Abbildungen werden Permeanzfunktionen für den kleinsten Luftspalt δ_{min} und den größten Luftspalt δ_{max} bestimmt. Die resultierende, mit einer statischen Exzentrizität behaftete, Permeanzfunktion $\lambda_{\text{ecc,stat}}(\alpha)$ wird dann sinusförmig zwischen den Funktionen für den kleinsten und größten Luftspalt bestimmt:

$$\lambda_{\text{ecc,stat}}(\alpha) = \frac{\hat{\lambda}_{\text{max}} - \hat{\lambda}_{\text{min}}}{\delta_{\text{max}} - \delta_{\text{min}}} \cdot e \cdot \cos(\alpha - \varphi) + \lambda(\alpha) \quad (13)$$

wobei $\hat{\lambda}_{\text{max}}$ das Maximum der Permeanzfunktion in radialer und tangentialer Richtung für den größten Luftspalt ist, $\hat{\lambda}_{\text{min}}$ ist das Maximum der Permeanzfunktion für den kleinsten Luftspalt, e ist die Exzentrizität und φ ist der Winkel der Exzentrizität (vergleiche Abb. 6). Die Beeinflussung des Verlaufs der relativen Statorpermeanzfunktion in radialer und tangentialer Richtung durch verschiedene Fertigungseinflüsse ist in [21] dargestellt.

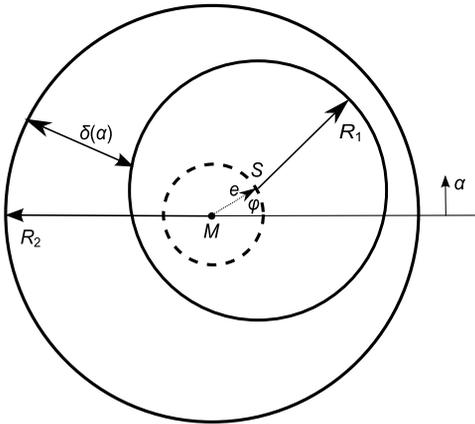


Abb. 6. Schematische Abbildung der Modellierung der Luftspaltweite bei einer exzentrischen Maschine

Für dynamische Rotorexzentritäten rotiert die Stelle des kleinsten Luftspalts mit der Geschwindigkeit des Rotors entlang des Umfangs in tangentialer Richtung. Aus diesem Grund wird die resultierende mit einer dynamischen Exzentrität behaftete Permeanzfunktion $\lambda_{ecc, dyn}(\alpha, t)$ zeitabhängig, ändert sich für jeden Zeitschritt t und (13) wird zu:

$$\lambda_{ecc, dyn}(\alpha, t) = \frac{\hat{\lambda}_{max} - \hat{\lambda}_{min}}{\delta_{max} - \delta_{min}} \cdot e \cdot \cos(\alpha - \omega t - \varphi) + \underline{\lambda}(\alpha), \quad (14)$$

wobei ω die Drehfrequenz des Rotors ist.

Im Allgemeinen können beide Arten der Exzentrität zur gleichen Zeit auftreten und führen dann zu einer gemischten Exzentrität.

Aufgrund der Linearität des Modells können beide Exzentritätarten durch Superposition berücksichtigt werden. Genauso können auch noch weitere Abweichungen zur gleichen Zeit im Modell superponiert werden.

3.2 Statorfeld

Das magnetische Flussdichtefeld des Stators wird von den stromführenden Leitern in den Nuten erzeugt. In [22] veröffentlicht Hague eine Gleichung zur Beschreibung des magnetischen Potentialverlaufes Ω zwischen zwei konzentrischen Zylindern, welcher von einem Linienstrom verursacht wird. Werden die beiden Zylinder als die Innen- und Außenkante eines Stators und Rotors aufgefasst, kann auf diesem Wege das magnetische Feld im glatten Luftspalt beschrieben werden. Diese Gleichung wird zur Berechnung der Stromansatzfunktion verwendet. Grundsätzlich wird hierbei zwar die Annahme getroffen, dass die beiden Zylinder unendlich permeabel sind, allerdings wird in [23] die Gleichung so erweitert, dass sich der Einfluss von Statorpermeabilität μ_{Stator} und Rotorpermeabilität μ_{Rotor} berücksichtigen lässt. Das Gesamtfeld mehrerer Leiter, dargestellt in Abb. 7, ergibt sich durch Überlagerung der Felder der einzelnen Leiter.

Nach Lösen von

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \cdot \Omega \quad (15)$$

ergeben sich für die Summe der Felder des k -ten Linienstroms $I_{C,k}$ am Ort $r_{C,k} \cdot e^{i\theta_{C,k}}$ in radialer Richtung (16) und in tangentialer Richtung (17), mit den Parametern (18) und (19), die das Verhältnis der Stator- zur Rotorpermeabilität berücksichtigen.

$$B_{rad}(r, \alpha, l) = \sum_{k=1}^{N_C} I_{C,k} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n \cdot (\alpha - \theta_{C,k})) \cdot \begin{cases} n \cdot G_{n,k} \cdot r^{n-1} - n \cdot F_{n,k} \cdot r^{-n-1} - \frac{1}{2\pi r_{C,k}^n} \cdot r^{n-1}, & r < r_{C,k} \\ n \cdot G_{n,k} \cdot r^{n-1} - n \cdot F_{n,k} \cdot r^{-n-1}, & r = r_{C,k} \\ n \cdot G_{n,k} \cdot r^{n-1} - n \cdot F_{n,k} \cdot r^{-n-1} - \frac{r_{C,k}^n}{2\pi} \cdot r^{-n-1}, & r > r_{C,k} \end{cases} \quad (16)$$

$$B_{tan}(r, \alpha, l) = \sum_{k=1}^{N_C} I_{C,k} \cdot \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n \cdot (\alpha - \theta_{C,k})) \cdot (n \cdot G_{n,k} \cdot r^n - n \cdot F_{n,k} \cdot r^{-n} - \frac{1}{2\pi r_{C,k}^n} \cdot r^n), & r < r_{C,k} \\ \frac{\alpha}{4\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n \cdot (\alpha - \theta_{C,k})) \cdot (n \cdot G_{n,k} \cdot r^{n-1} - n \cdot F_{n,k} \cdot r^{-n-1}), & r = r_{C,k} \\ \frac{\alpha}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n \cdot (\alpha - \theta_{C,k})) \cdot (n \cdot G_{n,k} \cdot r^{n-1} - n \cdot F_{n,k} \cdot r^{-n-1} - \frac{r_{C,k}^n}{2\pi} \cdot r^{-n-1}), & r > r_{C,k} \end{cases} \quad (17)$$

$$G_{n,k} = \frac{-(\mu_{Stator} - 1) \cdot (R_1^{2n}(\mu_{Rotor} - 1) + r_{C,k}^{2n}(\mu_{Rotor} + 1))}{r_{C,k}^{2n} \cdot 2\pi n \cdot (R_1^{2n}(\mu_{Stator} - 1)(1 - \mu_{Rotor}) + R_2^{2n}(\mu_{Stator} + 1)(1 + \mu_{Rotor}))} \quad (18)$$

$$F_{n,k} = \frac{R_1^{2n}(\mu_{Rotor} - 1) \cdot (r_{C,k}^{2n}(\mu_{Stator} - 1) + R_2^{2n}(\mu_{Rotor} + 1))}{r_{C,k}^{2n} \cdot 2\pi n \cdot (R_1^{2n}(\mu_{Stator} - 1)(1 - \mu_{Rotor}) + R_2^{2n}(\mu_{Stator} + 1)(1 + \mu_{Rotor}))} \quad (19)$$

Da die Statoransatzfunktion inhärent von der Nutpermeanz abhängig ist, ist es erforderlich die SCT zur Bestimmung der Permeanzfunktion im Voraus bestimmt zu haben. Auch hier wird die Nutgeometrie inklusive der Leiter zunächst wieder in den glatten Luftspalt transformiert. Der Verlauf des magnetischen Feldes im glatten Luftspalt ergibt sich dann nach dem Ansatz von Hague. Die Matrix der Koordinaten der N Punktströme in tangentialer und der M Punktströme in radialer Richtung, mit denen die Durchflutung der Nutleiter abgebildet werden soll, ist durch

$$\mathbf{M}_{Cu,S} = \begin{bmatrix} P_{Cu,S,1,1} & \dots & P_{Cu,S,1,M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{Cu,S,N,1} & \dots & P_{Cu,S,N,M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \cdot e^{i\theta_1} & \dots & R_M \cdot e^{i\theta_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1 \cdot e^{i\theta_N} & \dots & R_M \cdot e^{i\theta_N} \end{bmatrix} \quad (20)$$

definiert. Entspricht die Anzahl der Punktströme der Windungszahl w , so ergibt sich die Amplitude der Punktströme direkt aus dem Spulenstrom. Es reichen jedoch auch weniger Punktströme

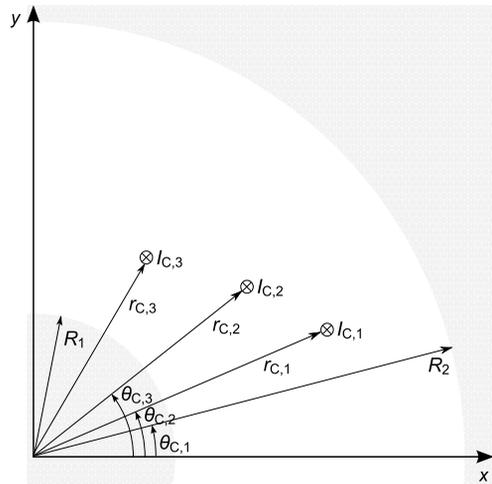


Abb. 7. Linienströme zwischen zwei konzentrischen Zylindern

zur Abbildung aus. In diesem Fall ergibt sich die Stromamplitude zu

$$I_{Cu} = I_{Spule} \cdot \frac{w}{N \cdot M} \quad (21)$$

Durch die verketteten Transformationsschritte in (12) erfolgt die Berechnung der Koordinaten der Punktströme in der Ψ -Ebene.

Die alleinige Berechnung des Feldes innerhalb der Ränder aus Abb. 3, also nur für eine Nutteilung, hätte die Verletzung der Quellenfreiheit des magnetischen Feldes zur Folge. Daher wird immer das Feld entlang des gesamten Umfangs ausgewertet. Bei der SCT wird die Fläche der Nut in die Fläche des Luftspaltes hinein transformiert. Dies hat eine zunehmende Stauchung der Fläche zur Mitte der Nutteilung hin zur Folge. Diese Flächenbeeinflussung lässt zu den tangentialen Rändern hin nach, so dass, abgesehen von der Skalierung bestimmt mit ΔU und ΔV , angenommen werden kann, dass die Radien an den tangentialen Rändern von der SCT unbeeinflusst bleiben [24]. Wird nun der Feldverlauf entlang des Umfangs außerhalb der Ränder ausgewertet, so geschieht dies mit dem Radius des letzten tangentialen Wertes innerhalb der Berandung.

Für die ideale Maschine ohne Fertigungsabweichungen reicht es aus dieses Feld eines Leiters einmalig zu berechnen. Das gesamte Statorfeld wird dann in Abhängigkeit vom Wicklungschema und des Stroms für jeden Zeitschritt daraus zusammengesetzt. Zur Berücksichtigung von Fertigungsabweichungen werden für jede abweichende Nutteilung eigene Ansatzfunktionen bestimmt. Das ist vergleichbar zur Berechnung der toleranzbehafteten Statorpermeanzfunktion. Die Stromansatzfunktionen werden dann für jeden Strang der Wicklung zur Strangansatzfunktion zusammengesetzt. Dies geschieht in Abhängigkeit der Position der Hin- und Rückleiter des Strangs und durch eine Gewichtung mit der Anzahl der Windungen in den Nuten [21].

Die Strangansatzfunktionen aller Stränge werden mit dem zum jeweiligen Zeitschritt im Strang fließenden Strom gewichtet und zum gesamten Statorfeld superponiert. Durch dieses Verfahren können auch Fertigungsfehler wie unterschiedliche Spulenwindungszahlen modelliert werden.

3.3 Rotorfeld

Wie von Hafner in [16] beschrieben, existieren verschiedene Möglichkeiten die magnetische Flussdichteverteilung im glatten Luftspalt permanentmagneterregter Maschinen zu bestimmen. So kann die Flussdichte zum Beispiel für interne und externe Rotoren und für

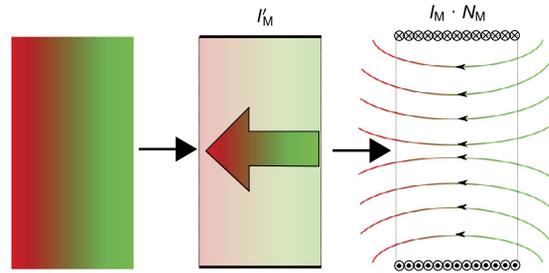


Abb. 8. Konzept zur Erzeugung des Permanentmagnetfeldes mittels Approximation durch Linienströme und Punktströme

radiale, parallele oder Halbach-Magnetisierung analytisch berechnet werden [25].

Für das hier vorgestellte Modell erfolgt die Berechnung mittels konformer Abbildungen für beliebige Magnetisierungswinkel zwischen radialer und paralleler Magnetisierung, wie in Abb. 9 dargestellt. Dazu wird das Magnetverhalten über äquivalente Punktströme nachgebildet, so dass das gleiche Verfahren wie bei der Bestimmung des Statorfelds (Abschn. 3.2) angewendet werden kann. Die Parameter zur Bestimmung des Feldes eines Magneten sind der äußere Rotorradius R_1 , die Magnethöhe h_{PM} und Luftspaltweite δ , die Remanenzinduktion B_r und die relative Permeabilität μ_r des Magneten, die Anzahl der Pole $2p$ der Maschine sowie der Polbedeckungsfaktor τ_p . Genau wie bei der relativen Permeanzfunktion kann die komplexe Rotorflussdichte für beliebige radiale Positionen r im Luftspalt und beliebige tangentialen Winkel α bestimmt werden.

Zunächst erfolgt die Bestimmung des Magnetarbeitspunktes anhand der Arbeitspunktgeraden des Permanentmagneten, um die Höhe der äquivalenten Punktströme zu bestimmen. Die sich am Magnet einstellende Flussdichte und Feldstärke ist abhängig von der Höhe des Magneten h_{PM} und der Luftspaltweite δ . Da sich der Luftspalt im Bereich der Nuten vergrößert, hat die Weite der Nutöffnung g_{Nut} hierbei einen direkten Einfluss auf den Arbeitspunkt. Berücksichtigt werden kann dies in einer guten Näherung durch den Carter-Koeffizienten [26]. Durch eine virtuelle Luftspaltvergrößerung in Abhängigkeit zur Weite der Nutöffnung g_{Nut} und der Permeabilität des Magneten μ_r , ergibt sich die virtuelle Luftspaltweite zu

$$\delta_{Carter} = \delta \cdot \frac{\theta_N}{\theta_N - \gamma \cdot \delta} \cdot \frac{h_{PM} + \delta}{h_{PM} + \mu_r \cdot \delta} \quad (22)$$

mit

$$\gamma = \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{g_{Nut}}{2\delta} \cdot \arctan\left(\frac{g_{Nut}}{2\delta}\right) - \ln\left(\sqrt{1 + \left(\frac{g_{Nut}}{2\delta}\right)^2}\right) \right) \quad (23)$$

Mit der Remanenzflussdichte B_r kann jetzt ein Hin- und ein Rückleiter aus zwei Linienströme an den Magnetflanken bestimmt werden, dessen Feld äquivalent zu dem des Magneten ist, wie in Abb. 8 in der Mitte dargestellt. Die Amplitude des Linienstroms beträgt

$$I'_M = \frac{B_r}{\mu_0} \cdot \frac{h_{PM} + \delta_{Carter}}{h_{PM} + \mu_r \cdot \delta_{Carter}} \quad (24)$$

Die Linienströme werden wiederum mit N_M Punktleitern modelliert (Abb. 8 rechts), die mit einer Amplitude von

$$I_M = I'_M \cdot \frac{h_{PM}}{N_M} \quad (25)$$

in äquidistanten Abständen am Ort der Linienströme sind.

Das Feld der Rotoransatzfunktion für einen Magneten ergibt sich durch Überlagerung der Felder der Punktströme, deren Felder mit

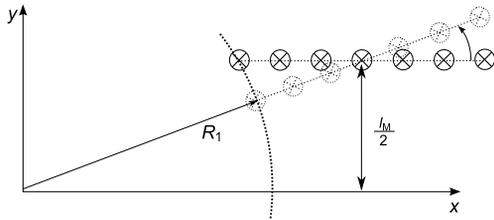


Abb. 9. Position der Punktströme in Abhängigkeit vom Magnetisierungswinkel

dem in Abschn. 3.2 beschriebenen Verfahren für den glatten Luftspalt berechnet werden können. Unterschiedliche Magnetisierungen können durch Modulation der Stromamplituden sowie durch Variation der Positionen der einzelnen Leiter realisiert werden, wie in Abb. 9 dargestellt.

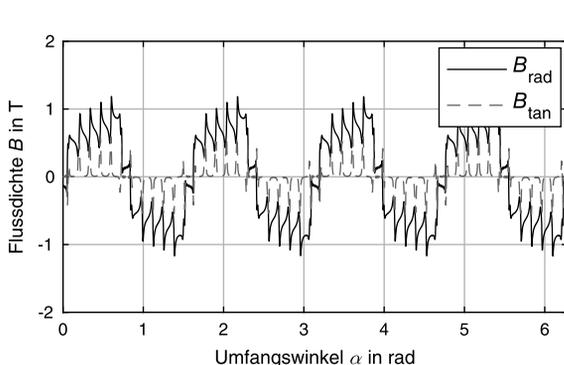
Für symmetrische Maschinen ist es ausreichend diese Rotoransatzfunktion für eine Polteilung zu bestimmen und dann entsprechend der Anzahl der Pole zu überlagern. Wenn der Rotor nicht ideal ist, können sich die Parameter für jede Polteilung ändern. So können sich aufgrund von Fertigungstoleranzen zum Beispiel die Magnetbreite oder -höhe, Remanenzinduktion oder Magnetisierungswinkel ändern. Die Rotoransatzfunktionen müssen dann für jeden abweichenden Pol separat bestimmt werden.

3.4 Luftspaltfeld, Flussverkettung und Kraftdichte

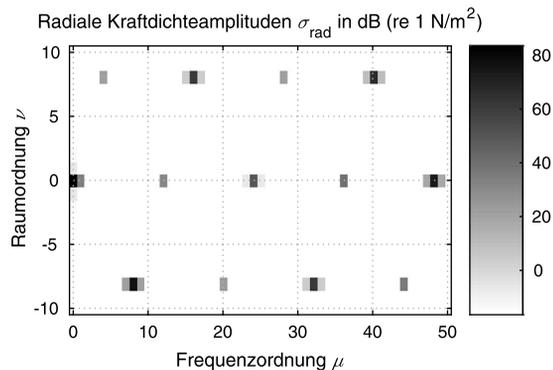
Die Fertigungseinflüsse werden nun in allen drei Komponenten des magnetischen Luftspaltfeldes berücksichtigt. Die resultierende Luftspaltflussdichteverteilung $B_{\text{Luftspalt}}(\alpha, t)$ für eine elektrische Maschine kann jetzt mit Hilfe von (2) für jeden Zeitschritt bestimmt werden. Ein so ermittelter Verlauf der magnetischen Flussdichte in radialer und tangentialer Richtung ist exemplarisch in Abb. 10(a) für einen Zeitschritt dargestellt. Deutlich zu erkennen sind die magnetischen Pole und der Einfluss der Nutung.

Die Flussverkettung ist eine integrale Größe, welche sich aus der lokalen Feldverteilung im Luftspalt einer elektrischen Maschine berechnen lässt. Der Fluss Φ , welcher eine beliebige Fläche A durchsetzt, ergibt sich über das Flächenintegral der zur Fläche normal orientierten Flussdichte B :

$$\Phi(t) = \int_A B(t) \cdot dA. \quad (26)$$



(a) Luftspaltfeld für einen Zeitpunkt



(b) Amplituden der radialen Kraftdichte

Abb. 10. Räumlicher Verlauf der magnetischen Flussdichte im Luftspalt und Amplituden der radialen Kraftdichte für eine Maschine mit statischer Exzentrizität

Für eine axialsymmetrische Anordnung vereinfacht sich dieser Zusammenhang zu einem, mit der aktiven Maschinenlänge l skalierten, Linienintegral:

$$\Phi(t) = l \cdot \int_{\alpha} B_{\text{rad}}(t) d\alpha. \quad (27)$$

Der Fluss, welcher eine Statorspule beziehungsweise alle Spulen eines Strangs einer mehrsträngigen Wicklungsverteilung durchsetzt, ist somit eine Funktion ihrer räumlichen Verteilung. Die Berechnung dieses Flussanteils auf Basis der Gesamtflussdichte im Luftspalt kann damit durchgeführt werden. Hierbei gilt die vereinfachende Annahme, dass der gesamte Luftspaltfluss unterhalb einer Spule diese komplett durchsetzt. Die Flussverkettung Ψ einer Spule ergibt sich dann unter Berücksichtigung der Anzahl der Spulenwindungen w zu

$$\Psi(t) = w \cdot \Phi(t) \quad (28)$$

und die Flussverkettung eines Strangs durch Addition aller Spulenflussverkettungen. Die im jeweiligen Strang induzierte Spannung ergibt sich dann aus der zeitlichen Ableitung der Strangflussverkettung nach der Zeit t :

$$U_{\text{ind}}(t) = - \frac{d\Psi(t)}{dt}. \quad (29)$$

Die auf eine Oberfläche wirkende Kraftdichte $\underline{\sigma}(\alpha, t)$ kann im Allgemeinen aus dem Magnetfeld $\underline{B}(\alpha, t)$ in der Luft bestimmt werden, welche die Oberfläche umgibt:

$$\underline{\sigma}(\alpha, t) = \frac{B^2(\alpha, t)}{2\mu_0}. \quad (30)$$

Diese Gleichung kann aus der Lorentzkraft und dem Maxwell'schen Spannungstensor hergeleitet werden. μ_0 ist die Vakuumpermeabilität. Für zylindrische Objekte, wie in einer elektrischen Maschine, kann (30) in eine reellwertige radiale Kraftdichtekomponente

$$\sigma_{\text{rad}}(\alpha, t) = \frac{1}{2\mu_0} \cdot (B_{\text{rad}}^2(\alpha, t) - B_{\text{tan}}^2(\alpha, t)) \quad (31)$$

und eine imaginäre tangentialer Kraftdichtekomponente

$$\sigma_{\text{tan}}(\alpha, t) = \frac{1}{\mu_0} \cdot B_{\text{rad}}(\alpha, t) \cdot B_{\text{tan}}(\alpha, t) \quad (32)$$

aufgeteilt werden.

Die tangentialer Kraftdichte $\sigma_{\text{tan}}(\alpha, t)$ summiert sich zum Drehmoment einer elektrischen Maschine. Das Integral über die tangentialer

Kraftdichte entlang des Luftspalts in Umfangrichtung ergibt das mechanische Drehmoment:

$$M(t) = r \cdot F_{\tan}(t) = r^2 \cdot l \cdot \int_0^{2\pi} \sigma_{\tan}(\alpha, t) \, d\alpha \quad (33)$$

Dabei ist r der Radius, $F_{\tan}(t)$ die Summenkraft in tangentialer Richtung und l die Länge des Luftspalts in axialer Richtung.

Die in der Regel größere radiale Kraftdichte $\sigma_{\text{rad}}(\alpha, t)$ wirkt auf die Statorzähne und verformt damit den Stator. Sie ist daher einer der Gründe für die Schallabstrahlung elektrischer Maschinen.

Aufgrund des dritten Newtonschen Gesetzes wirken diese Kräfte nicht nur auf den Stator der elektrischen Maschine, sondern auch auf den Rotor und damit im speziellen auf die Rotorlager. Integrale über die komplexe Kraftdichte resultieren in einer Summenkraft in x-Richtung

$$F_x(t) = r \cdot l \cdot \int_0^{2\pi} |\underline{\sigma}(\alpha, t)| \cdot \cos(\alpha + \arg(\underline{\sigma}(\alpha, t))) \, d\alpha \quad (34)$$

und in y-Richtung

$$F_y(t) = r \cdot l \cdot \int_0^{2\pi} |\underline{\sigma}(\alpha, t)| \cdot \sin(\alpha + \arg(\underline{\sigma}(\alpha, t))) \, d\alpha \quad (35)$$

in einem kartesischen Koordinatensystem. In einer ideal symmetrischen elektrischen Maschine addieren sich diese Summenkräfte für jeden Zeitschritt immer zu Null. Summenkräfte ungleich Null resultieren aus unterschiedlichen Luftspaltflussdichten auf gegenüberliegenden Seiten der Maschine. Diese Unterschiede in der magnetischen Flussdichte können durch unterschiedliche Materialeigenschaften oder Luftspaltunterschiede, beispielsweise aufgrund von Exzentrizitäten, hervorgerufen werden [27]. Für die Rotorlagerung sind im Speziellen umlaufende Summenkräfte kritisch, da sich diese auf die Lagerlebensdauer auswirken können [13]. Umlaufende Kräfte werden durch den Wechselanteil in den Summenkräften beschrieben.

Die radialen Kraftdichten können mit (31) berechnet werden. Die Berechnung resultiert in einer Matrix, welche die radialen Kraftdichten $\sigma_{\text{rad}}(\alpha, t)$ für alle örtlichen und zeitlichen Abtastwerte beinhaltet. Eine zweidimensionale Fourier-Transformation ergibt dann die Kraftdichteamplituden $\hat{\sigma}_{\text{rad}}(\nu, \mu)$ in Abhängigkeit der räumlichen Ordnung ν und der zeitlichen Ordnung μ . Abbildung 10(b) zeigt diese Amplituden der Kraftdichte für eine Maschine mit statischer Exzentrizität. Deutlich zu erkennen sind die Hauptordnungen der Kraftdichte, sowie die um die Hauptordnungen entstehenden Nebenordnungen ± 1 , aufgrund der statischen Exzentrizität.

Genauso kann mit (33) der Einfluss von Fertigungsabweichungen auf das Drehmoment untersucht werden oder mit (34) und (35) der Einfluss auf die Summenkraft. Abbildung 11 zeigt die aus einer dynamischen Exzentrizität von $e = 50 \mu\text{m}$ resultierenden Summenkräfte in x- und y-Richtung für eine Rotorumdrehung. Da die dynamische Rotorexzentrizität mit der Geschwindigkeit des Rotors entlang des Umfangs in tangentialer Richtung rotiert, ergibt sich diese Kreisdarstellung. Die Summenkraft wirkt somit zu jedem Zeitpunkt in eine andere resultierende Richtung. Für eine statische Exzentrizität würde sich in dieser Darstellung nur ein kleiner Punkt am Ort der Exzentrizität ergeben.

Die so ermittelten Kräfte gelten immer nur für einen stationären Betriebspunkt der elektrischen Maschine mit konstanter Drehzahl bei konstantem Drehmoment. Da sich die die Kräfte abhängig von Rotorposition und Bestromungszustand ändern, muss der gesamte Betriebsbereich der Maschine betrachtet werden. Dazu wird die

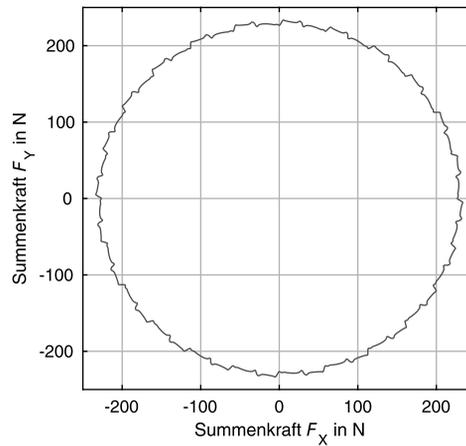


Abb. 11. Summenkräfte in x- und y-Richtung für eine Rotorumdrehung bei einer dynamischen Exzentrizität von $e = 50 \mu\text{m}$

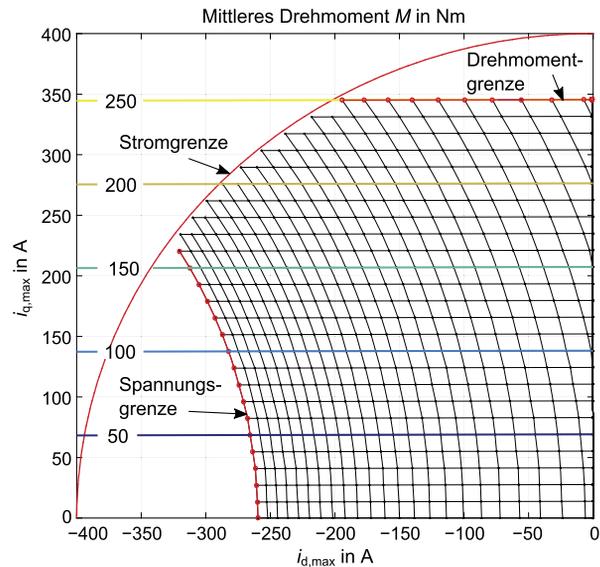


Abb. 12. Trajektorien für das mittlere Drehmoment und die Flussverkeftung für verschiedene Bestromungen

elektrische Maschine im Folgenden in einem dq-Koordinatensystem modelliert, so dass Summenkräfte mittels eines Antriebssimulationsmodells über den gesamten Betriebsbereich der elektrischen Maschine bestimmt und charakterisiert werden können.

4. Antriebssimulationsmodell

Um die Betriebscharakteristik der Maschine zu berücksichtigen, werden die Betriebspunkte der Maschine gemäß einer Steuervorschrift berechnet. Hierfür wird die Maschine in einem rotorflussfesten dq-Koordinatensystem modelliert, so dass sich die Flussverkeftungen Ψ in d- und q-Achse zu

$$\begin{bmatrix} \hat{\Psi}_d \\ \hat{\Psi}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_d \\ \hat{i}_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\Psi}_F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

ergeben. L_d und L_q sind die Induktivitäten in Längs- und Querrichtung, i_d und i_q die entsprechenden Ströme. Ψ_F ist die Flussverkeftung des Erregerfeldes mit den Statorspulen. $\hat{\Psi}_d$ und $\hat{\Psi}_q$ lassen sich mit (27) und (28) aus dem radialen Luftspaltfeld bestimmen. Der Vektor der Flussverkeftung bestimmt sich dann zu:

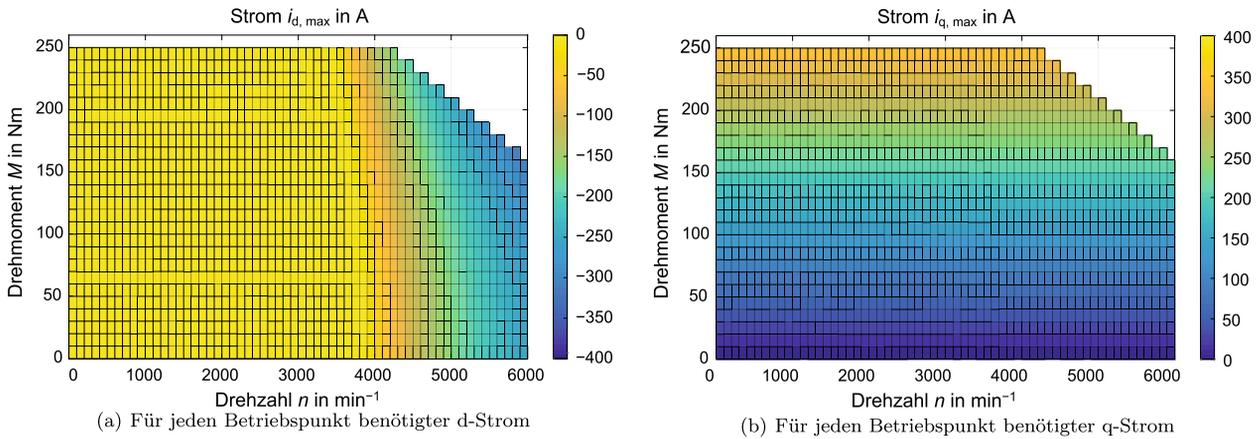


Abb. 13. Betriebspunktabhängige dq-Stromkombinationen

$$\hat{\psi} = \sqrt{\hat{\psi}_d^2 + \hat{\psi}_q^2} \quad (37)$$

Für die Berechnung der Betriebspunkte im Grunddrehzahl- und Feldschwächebereich wird eine kombinierte Steuervorschrift verwendet. Das Optimierungsproblem lässt sich formulieren mit:

$$\text{Minimiere } J(\hat{i}_{d,i,j}, \hat{i}_{q,i,j}) = \sqrt{\hat{i}_{d,i,j}^2 + \hat{i}_{q,i,j}^2} \quad (38)$$

$\hat{i}_{d,i,j}, \hat{i}_{q,i,j} \in \mathbb{R}$

unter den Bedingungen

$$M_i = \frac{3}{2} \cdot p \cdot (\hat{\psi}_f \cdot \hat{i}_{q,i} + (L_d - L_q) \cdot \hat{i}_{d,i} \cdot \hat{i}_{q,i}), \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (39)$$

$$\hat{u}_j = \omega_j \hat{\psi}_j \leq \hat{u}_{\max}, \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (40)$$

mit dem Drehmomentvektor M_1, M_2, \dots, M_m mit $m \in \mathbb{N}$ und dem Drehzahlvektor n_1, n_2, \dots, n_n mit $n \in \mathbb{N}$. Dieses Optimierungsproblem kombiniert die MTPA-Steuervorschrift für den Grunddrehzahlbereich (im Englischen: Maximum Torque Per Ampere) und die MTPV-Steuervorschrift für den Feldschwächebereich (im Englischen: Maximum Torque Per Voltage) [28].

In Abb. 12 sind die Trajektorien für das mittlere Drehmoment und die Flussverkettung für verschiedene Bestromungen abgebildet. Mit Hilfe der kombinierten Steuervorschrift (38) lassen sich Betriebspunkte für den gesamten Betriebsbereich ($f_{el} = [0 \text{ Hz}, 400 \text{ Hz}]$, $M_{el} = [0 \text{ Nm}, 250 \text{ Nm}]$) berechnen. Die rotorflussfesten dq-Stromvektoren sind für jeden Betriebspunkt fest definiert. Im Grunddrehzahlbereich wird die Maschine ausschließlich mit dem q-Strom betrieben. Wird die Maschine beschleunigt und die Spannungsgrenze erreicht, wird die Gesamtflussverkettung mit einem negativen d-Strom verringert, um die Spannung trotz steigender Drehzahlen konstant zu halten. Der sich für die Randbedingungen errechnete Feldschwächebereich wird durch das Gitter in Abb. 12 dargestellt. Diese dq-Stromvektoren sind in den Abb. 13(a) und 13(b) separiert aufgetragen und können nun für die Berechnung der betriebspunktabhängigen Belastungen verwendet werden.

In Abb. 14 ist die mittlere Summenkraft für die ermittelte Exzentrizität von $e = 50 \mu\text{m}$ abgebildet, die nach der Wahrscheinlichkeitsdichte aus Abb. 2(b) dem wahrscheinlichsten Fall für eine statische und dynamische Exzentrizität entspricht. Die betriebspunktabhängige Verteilung der mittleren Summenkraft macht deutlich, dass diese von der dq-Bestromungskombination abhängig ist. Während die Querkomponente und damit auch das Drehmoment einen geringen Einfluss auf die Summenkraft haben, verringert der Feldschwächstrom erwartungsgemäß die Summenkraft durch die Exzentrizität. Mit Hilfe dieser wirksamen Kraft kann zum Beispiel die Lagerbelastung durch magnetische Summenkräfte berechnet werden,

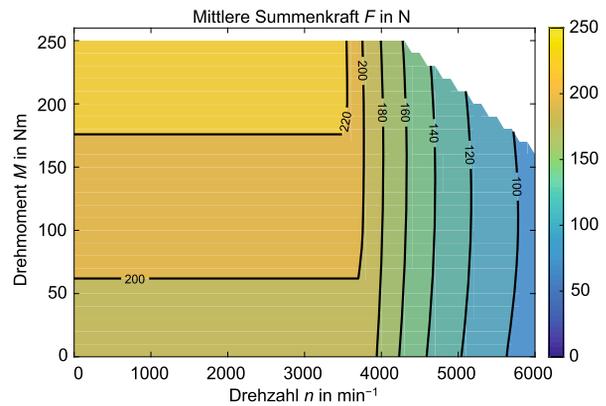


Abb. 14. Betriebspunktabhängige Summenkraft für eine statische und dynamische Exzentrizität von $e = 50 \mu\text{m}$

wie in [13] vorgestellt. Die dort auf Grundlage von Finite-Elemente-Berechnungen ermittelten Kräfte liegen in der gleichen Größenordnung. Auf dieser Grundlage können die Toleranzfelder aus Abb. 1(b) angepasst oder neue Lagerkonzepte ausgewählt werden.

5. Konklusion

In diesem Beitrag wird der Einfluss von Fertigungsabweichungen auf die Kräfte in elektrischen Maschinen untersucht. Durch statistische Toleranzrechnung werden exemplarisch zunächst die Wahrscheinlichkeiten für Exzentrizitäten bestimmt. Mittels der Methode der konformen Abbildungen, welche eine analytische Berechnung der Felder ermöglicht, wird eine Möglichkeit vorgestellt, die Kräfte in elektrischen Maschinen so zu modellieren, dass Berechnungen zeiteffizient möglich sind. Dabei können auch fertigungsbedingte Einflüsse wie beispielsweise statische oder dynamische Exzentrizitäten abgebildet werden.

Um die Betriebscharakteristik der permanentmagneterregten elektrischen Maschine zu berücksichtigen, wird die Maschine in einem dq-Koordinatensystem modelliert, so dass die Kräfte über den gesamten Betriebsbereich der elektrischen Maschine bestimmt und charakterisiert werden können. Die Berechnung eines Kennfeldes über den Bereich von 11×11 dq-Strömen kann damit auf einem Arbeitsplatzrechner innerhalb weniger Minuten durchgeführt werden. Die Analyse einzelner Betriebspunkte erfolgt im Frequenzbereich. Die durch Fertigungseinflüsse zusätzlich entstehenden Kraft-

dichteordnungen sind charakteristisch erkennbar und liegen in der gleichen Größenordnung wie bei Finite-Elemente-Simulationen.

Das vorgestellte Modell bietet damit die Möglichkeit permanentmagneterregte elektrische Maschinen zeiteffizient zu analysieren und stellt damit insbesondere im frühen Entwurfsstadium elektrischer Maschinen ein wertvolles Analysewerkzeug dar. Geometrische Abmessungen des Maschinenentwurfs lassen sich schnell verändern und Fertigungseinflüsse können unabhängig voneinander betrachtet und bewertet werden. Somit lassen sich auch verschiedene Maschinenentwürfe hinsichtlich ihrer Sensitivität auf unterschiedliche Fertigungseinflüsse miteinander vergleichen.

Literatur

- Hildebrand, L. (1930): Quiet induction motors. *Trans. Am. Inst. Electr. Eng.*, 49(3), 848–852.
- Jordan, H. (1950): Geräuscharme Elektromotoren. Essen: W. Girardet.
- Nandi, S., Toliyat, H. (1999): Fault diagnosis of electrical machines – a review. In *International electric machines and drives conference (IEMDC)*.
- van Riesen, D., Schlensock, C., Henrotte, F., Hameyer, K. (2006): Acoustic measurements for detecting manufacturing faults in electrical machines. In *17th international conference on electrical machines (ICEM)*.
- Schlensock, C., Hameyer, K. (2006): Analysis of cogging torque harmonics due to manufacturing tolerances in permanent magnet synchronous machines. In *7th international symposium on electric and magnetic fields (EMF)*.
- Wolbank, T., Machl, J., Hauser, H., Macheiner, P. (2003): Lamination material anisotropy and its influence on the operation of inverter-fed induction machines. *IEEE Trans. Magn.*, 39(5), 3283–3285.
- Coenen, I., van der Giet, M., Hameyer, K. (2012): Manufacturing tolerances: estimation and prediction of cogging torque influenced by magnetization faults. *IEEE Trans. Magn.*, 48(5), 1932–1936.
- Tröger, A., Hempel, T., Würfel, M., Hofmann, W. (2011): Untersuchung der magnetischen Flussdichte in permanentmagnetisch erregten Synchronmaschinen in Außenläuferausführung. In *VDE-VDI-Fachtagung Antriebssysteme, VDI-Bericht 2138*.
- Offermann, P., Hameyer, K. (2012): Comparison of physical and non-physical stochastic magnetisation fault approaches. In *12th international workshop on optimization and inverse problems in electromagnetism*.
- Steinbrink, J. (2006): Kraftwirkungen in permanentmagneterregten Maschinen. *Fortschritt-Berichte VDI Reihe 21 (Vol. 370)*. Düsseldorf: VDI Verlag.
- Herold, T., Franck, D., Böhmer, S., Schröder, M., Hameyer, K. (2015): Transientes Simulationsmodell für lokale Kraftanregungen elektrischer Antriebe. *E&I, Elektrotech. Inf.tech.*, 132(1), 46–54.
- Herold, T., Franck, D., Schröder, M., Böhmer, S., Hameyer, K. (2016): Transientes Simulationsmodell für die akustische Bewertung elektrischer Antriebe. *E&I, Elektrotech. Inf.tech.*, 133(2), 55–64.
- Ruf, A., Schröder, M., Putri, A. K., Konrad, R., Franck, D., Hameyer, K. (2016): Analysis and determination of mechanical bearing load caused by unbalanced magnetic pull. *Compel*, 35(2), 728–743. ISSN 0332-1649.
- Carter, F. W. (1926): The magnetic field of the dynamo-electric machine. *J. Inst. Electr. Eng.*, 3, 64(359), 1115–1138.
- Žarko, D., Ban, D., Lipo, T. A. (2006): Analytical calculation of magnetic field distribution in the slotted air gap of a surface permanent-magnet motor using complex relative air-gap permeance. *IEEE Trans. Magn.*, 42(7), 1828–1837.
- Hafner, M., Franck, D., Hameyer, K. (2010): Static electromagnetic field computation by conformal mapping in permanent magnet synchronous machines. *IEEE Trans. Magn.*, 46(8), 3105–3108.
- Zhu, W., Fahimi, B., Pekarek, S. (2006): A field reconstruction method for optimal excitation of permanent magnet synchronous machines. *IEEE Trans. Energy Convers.*, 21(2), 305–313.
- Hafner, M., Franck, D., Hameyer, K. (2012): Conformal mapping approach for permanent magnet synchronous machines: on the modeling of saturation. *Arch. Electrical Eng.*, 61(2), 211–220.
- Driscoll, T. A. (1996): Algorithm 756: a MATLAB toolbox for Schwarz–Christoffel mapping. *ACM Trans. Math. Softw.*, 22, 168–186.
- Gieras, J. F., Wang, C., Cho Lai, J. (2006): *Noise of polyphase electric motors*. USA: CRC Press.
- Schröder, M., Franck, D., Hameyer, K. (2015): Analytical modeling of manufacturing tolerances for surface mounted permanent magnet synchronous machines. In *IEEE international electric machines and drives conference (IEMDC), Coeur d’Alene, Idaho, USA (1138–1144)*.
- Hague, B. (1962): *The principles of electromagnetism applied to electrical machines*. New Jersey: Dover.
- O’Connell, T. C., Krein, P. T. (2009): A Schwarz–Christoffel-based analytical method for electric machine field analysis. *IEEE Trans. Energy Convers.*, 24(3), 565–577.
- Schinzinger, R., Laura, P. A. A. (2003): *Conformal mapping: methods and applications*. Amsterdam: Elsevier.
- Zhu, Z. Q., Howe, D., Chan, C. C. (2002): Improved analytical model for predicting the magnetic field distribution in brushless permanent-magnet machines. *IEEE Trans. Magn.*, 38(1), 229–238.
- Gieras, J. F., Wang, R.-J., Kamper, M. J. (2008): *Axial flux permanent magnet brushless machines*. New York: Springer.
- Robinson, R. C. (1943): The calculation of unbalanced magnetic pull in synchronous and induction motors. *Electr. Eng.*, 62(10), 620–623.
- De Doncker, R., Pülle, D., Veltman, A. (2010): *Advanced electrical drives: analysis, modeling, control*. Berlin: Springer.

Autoren



Michael Schröder

studierte an der RWTH Aachen Elektrotechnik und schloss im Mai 2012 mit dem Diplom ab. Im Anschluss wurde er wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Elektrische Maschinen der RWTH Aachen. Seit 2014 ist er Gruppenleiter der Gruppe „Analyse und Design“ des Instituts. Seine Forschungsschwerpunkte liegen im Bereich des akustischen und strukturdynamischen Verhaltens elektrischer Maschinen unter dem Einfluss von Fertigungsabweichungen.



Andreas Ruf

studierte an der Ruhr-Universität Bochum Elektrotechnik und erhielt im August 2012 den Master of Science. Seit Januar 2013 ist er wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Elektrische Maschinen der RWTH Aachen. Seine Forschungsschwerpunkte umfassen die Berechnung von Eisenverlusten, das thermische Verhalten und Lebensdauermodellierung, Überlastfähigkeit sowie die Auslegung und Regelung elektrischer Maschinen.

**David Franck**

studierte an der RWTH Aachen Elektrotechnik und schloss im März 2008 mit dem Diplom ab. Im Anschluss wurde er wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Elektrische Maschinen der RWTH Aachen. Seit 2011 ist er ein Oberingenieur des Instituts. Im Mai 2015 promovierte Dr. Franck zum Thema „Ein effizientes transientes Antriebsakustikmodell als Werkzeug zur Simulation und Analyse elektromagnetisch erregter Schwingungen“. Seine Forschungsschwerpunkte liegen im Bereich des akustischen Verhaltens elektrischer Maschinen.

**Kay Hameyer**

erwarb sein Diplom in Elektrotechnik von der Universität Hannover und promovierte an der Technischen Universität Berlin. Nach seinem Studium arbeitete er für die Robert Bosch GmbH in Stuttgart als Entwicklungsingenieur für permanentmagneterregte Servomotoren und Kraftfahrzeugbordnetzkomponenten. Bis 2004 war Dr. Hameyer Professor für Numerische Feldberechnungen und Elek-

trische Maschinen an der KU Leuven in Belgien. Seit 2004 ist er Professor und Leiter des Instituts für Elektrische Maschinen der RWTH Aachen. 2006 war er Vizedekan der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik der RWTH Aachen und von 2007 bis 2009 Dekan der Fakultät. Seine Forschungsschwerpunkte liegen im Bereich der numerischen Feldberechnung und -optimierung, dem Entwurf und der Regelung elektrischer Maschinen, insbesondere von permanentmagneterregten Maschinen und Drehfeldmaschinen sowie der Entwicklung von Methoden für die virtuelle Realität. Seit vielen Jahren beschäftigt sich die Arbeit von Dr. Hameyer mit der Magnetschwebetechnik für Antriebssysteme, der elektromagnetischen Geräuschanregung elektrischer Maschinen und der Charakterisierung ferromagnetischer Materialien. Er ist Autor von mehr als 250 Journal-Publikationen, mehr als 500 internationalen Konferenzveröffentlichungen und Autor von vier Büchern. Dr. Hameyer ist Mitglied im VDE, IEEE Senior Member und Fellow des IET.